Prüfung Grundprinzipien der Versicherungs- und Finanzmathematik 2015

Aufgabe 1: (20 min)

a) Gegeben sei ein einperiodiger State Space-Markt mit zwei Zuständen, der aus zwei Wertpapieren bestehe, einer sicheren Anlage zum Zins 5% sowie einem risikobehafteten Wertpapier. Das Wertpapier weise einen anfänglichen Preis von 75 Geldeinheiten auf und den Rückflussvektor $(105, 55)^T$ in t = 1.

i) Bestimmen Sie die State Space-Matrix V und den anfänglichen Preisvektor w!

ii) Weisen Sie nach, dass der vorstehend spezifizierte State Space-Markt arbitragefrei ist! Wie lautet der preiserzeugende Vektor?

iii) Bestimmen Sie die risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten!

iv) Bestimmen Sie den arbitragefreien Preis des Finanztitels $(c^2, c)^T$ auf der Basis einer risikoneutralen Bewertung!

v) Bestimmen Sie den arbitragefreien Preis des Finanztitels $(c, c^2)^T$, wobei c = 5, durch Duplikation!

vi) Wie lauten die arbitragefreien Preise der Finanztitel mit den Rückflussvektoren $(1, 0)^T$ und $(0, 1)^T$. Argumentieren Sie hier grundsätzlich, d.h. ohne Vornahme einer konkreten Berechnung!

(12 min)

b) Betrachten Sie eine Finanzposition, die aus einem Short Call sowie einem Short Put besteht (Short Straddle). Put und Call beziehen sich auf einen Basistitel mit Kursent wicklung $\{S_t; t \geq 0\}$, laufen beide ein Jahr und besitzen beide einen Ausübungspreis von X = 110. Die Wertentwicklung des Basistitels über die Periode [0, 1] folge einem Bi nomialprozess mit Startwert $s_0 = 100$. In T = 1 kann der Prozess um 20% gestiegen oder um 20% gefallen sein. Der Einperiodenzins beträgt 5%. Bestimmen Sie den arbitrage freien Preis der Finanzposition durch Duplikation!

(8 min)

Lösungsskizze:

a) i) $V = \begin{pmatrix} 1{,}05 & 105 \\ 1{,}05 & 55 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 75 \end{pmatrix}$

ii) Betrachte LGS $V^T x = w$, d.h.

(I) $1{,}05x_1 + 1{,}05x_2 = 1$

(II) $105x_1 + 55x_2 = 75$

Multiplikation von (I) mit 100 ergibt

(I') $105x_1 + 105x_2 = 100$

(I')-II) ergibt $50x_2 = 25$, d.h. $x_2 = 1/2$.

Aus (I) folgt dann

$$x_1 = \frac{1 - (1{,}05)(0{,}5)}{1{,}05} = \frac{1}{1{,}05} - 0{,}5$$

$$= 0{,}952381 - 0{,}5 = 0{,}452381$$

Die Lösung des LGS ist <u>strikt</u> positiv, damit ist der Markt arbitragefrei.

iii) $q_1 = 1{,}05x_1 = 0{,}475$

$q_2 = 1{,}05x_2 = 0{,}525$

iv) Preis auf Basis risikoneutraler Bewertung lautet

$$\frac{1}{1.05} E_Q\left[\begin{pmatrix} c^2 \\ c \end{pmatrix}\right] = \frac{0{,}475c^2 + 0{,}525c}{1{,}05} = 0{,}452c + 0{,}5\,c^2$$

v) Betrachte LGS

$$x_1\begin{pmatrix} 1{,}05 \\ 1{,}05 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 105 \\ 55 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 25 \end{pmatrix},$$

d.h.

(I) $1{,}05x_1 + 105x_2 = 5$

(II) $1{,}05x_1 + 55x_2 = 25$

(I)-(II) $50x_2 = -20,\ x_2 = -2/5$

Weiter:

$1{,}05x_1 = 5 + 105(2/5) = 5 + 42 = 47$

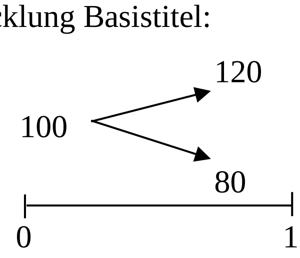
$x_1 = 44.762$

Preis: $x_1 + 100x_2 = 44{,}762 - 75\ (0{,}4)$

$= 14{,}762.$

vi) Die Lösung des Gleichungssystems unter (ii), der sog. preiserzeugende Vektor, entspricht den Preisen der Einheitsvektoren, d.h. der Preis von $(1,0)^T$ ist gegeben durch 0,452381 und der Preis von $(0,1)^T$ durch 0,5.

b) Entwicklung Basistitel:



Finanzposition allgemein:

$-\max(S_1 - 110, 0) - \max(110 - S_1, 0)$

$= -\{\max(S_1 - 110, 0) + \max(110 - S_1)\}$

$$= -\left\{\begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \end{pmatrix}\right\} = -\begin{pmatrix} 10 \\ 30 \end{pmatrix}$$

Duplikation:

(I) $1{,}05x_1 + 120x_2 = -10$

(II) $1{,}05x_1 + \ \ 80x_2 = -30$

(I)-(II): $40x_2 = 20$, $x_2 = 1/2$

(I): $x_1 = (-10 - 120/2)/(1{,}05) = -\frac{70}{1{,}05} = -66{,}\overline{6}$

Arbitragefreier Preis:

$$1 \cdot x_1 + 100x_2 = -16{,}\overline{6}\ .$$

Der Stillhalter der Option erhält $16.\overline{6}$ Geldeinheiten.

<u>Aufgabe 2:</u> (24 min)

a) Ein fünfjähriger Standardbond ist charakterisiert durch die Zahlungsreihe {Z, Z, Z, Z, Z+N} seiner Zins- und Tilgungszahlungen. Dabei bedeute N den Nennwert des Bonds und Z = Ni die Höhe der jeweiligen Zinszahlungen, wobei i den Nominalzins des Bonds bezeichne.

i) Bestimmen Sie einen allgemeinen Ausdruck für den fairen Wert des Bonds unter Benutzung der geometrischen Summe, wenn ein fristigkeitsunabhängiger Marktzins in Höhe von r zu Grunde gelegt wird!

ii) Weisen Sie auf der Grundlage von i) nach, dass im Falle $r = i$ der faire Wert des Bonds seinem Nennwert entspricht (Pari-Notierung)!

iii) Bestimmen Sie den fairen Wert des Bonds zum Zeitpunkt s , wobei $0 < s < 1$.

iv) Bestimmen Sie einen allgemeinen Ausdruck für die effektive Rendite (Baldwin-Verzinsung) des Bonds bei Annahme der Wiederanlage der Rückflüsse zum Marktzins r und einem Kaufpreis von P_0! Benutzen Sie dabei die geometrische Summe.

(12 min)

b) i) Bestimmen Sie den Barwert einer ewigen (unbegrenzte Restlaufzeit) Anleihe mit konstanter Kuponzahlung Z = Ni! Gehen Sie dabei von einem fristigkeitsunabhängigen Marktzins r aus.
<u>Hinweis:</u> Bei endlicher Laufzeit T gilt für den Kuponbond die Barwertformel

$$P_0(r, T) = N\left[\frac{i}{r} + \left(1 - \frac{i}{r}\right)(1 + r)^{-T}\right].$$

ii) Welchen Wert nimmt die Macaulay-Duration der ewigen Kuponanleihe unter i) an?

iii) Welchen Wert nimmt die (relative) Konvexität der ewigen Kuponanleihe unter i) an?

(12 min)

Lösungsskizze:

a) i) Definiere den Aufzinsungsfaktor durch $q := 1 + r$

Es gilt dann

$$P_0(r) = Zq^{-1} + Zq^{-2} + Zq^{-3} + Zq^{-4} + Zq^{-5} + Nq^{-5}$$
$$= Zq^{-5}\,(q^4 + q^3 + q^2 + q + 1) + Nq^{-5}$$
$$= \frac{Z}{q^5}\left(\frac{q^5 - 1}{q - 1}\right) + Nq^{-5}$$
$$= \frac{Z}{r}\left(1 - \frac{1}{q^5}\right) + Nq^{-5}$$

Alternativ: ($v := q^{-1}$)

$$P_0(r) = Z(v + v^2 + v^3 + v^4 + v^5) + Nv^5$$
$$= Z\,v(1 + v + v^2 + v^3 + v^4) + Nv^5$$
$$= Z\,v\,\frac{1 - v^5}{1 - v} + Nv^5$$

ii) Für $Z = N\,i$ und $r = i$ folgt aus i)

$$P_0(i) = N\left(1 - \frac{1}{q^5}\right) + Nq^{-5} = N$$

iii) $P_s(r) = (1 + r)^s\, P_0(r) = q^s\, P_0(r)$

iv) Es muss gelten

$$P_0(1 + r_{eff})^5 = Zq^4 + Zq^3 + \ldots + Z + N$$
$$= Z(1 + q + q^2 + q^3 + q^4) + N$$
$$= Z\,\frac{q^5 - 1}{q - 1} + N$$

und damit

$$r_{eff} = \sqrt[5]{\left(Z\frac{q^5 - 1}{r} + N\right)/P_0} - 1$$

b) i) Betrachte $\lim_{T\to\infty} P_0(r,T)$. Es gilt

$$\lim_{T\to\infty} P_0(r,T) = \frac{Ni}{r} = \frac{Z}{r}$$

ii) Es gilt zunächst:

$$dP_0/dr = -Z\,r^{-2}$$

Hieraus folgt für die absolute Duration D_A:

$$D_A(r) = -dP/dr_0 = Z\,r^{-2}$$

Für die Macaulay-Duration folgt hieraus:

$$D(r) = (1 + r)\,\frac{D_A(r)}{P_0} = (1 + r)\,\frac{Z}{r^2}\cdot\frac{r}{Z}$$

$$= \frac{1 + r}{r}\,.$$

iii) Es gilt $C(r) = P_0''(r)/\,P_0(r)$.

Nach ii) folgt $P_0''(r) = d(-Z\,r^{-2})/dr = 2Z\,r^{-3}$.

Damit gilt insgesamt:

$$C(r) = 2\,\frac{Z}{r^3}\;\frac{r}{Z} = \frac{2}{r^2}$$

<u>Aufgabe 3:</u> (28 min)

a) Aktuar Z nimmt im Alter x (definitionsgemäß t = 0) eine Schuld der Höhe S_0 auf, die er mit gleichhohen <u>nachschüssigen</u> Zahlungen A (Annuität) in n Jahren inklusive aufge laufener Zinsen tilgen möchte. Der als fristigkeitsunabhängig angenommene Kreditzins beträgt r. Wie hoch ist die Annuität?
<u>Hinweis:</u> Gehen Sie aus von dem Grundsatz Barwert Schuld = (Barwert der Rückzah lungen) und verwenden Sie die geometrische Summe.
(6 min)

b) Weisen Sie nach, dass für t = 1, …, n die Restschuld RS_t am Ende der jeweiligen Periode gegeben ist durch

$$RS_t = S_0\;\frac{q^n - q^t}{q^n\; - 1}.$$

<u>Hinweis:</u> Gehen Sie von dem Ansatzpunkt aus, dass sich die Restschuld zum Zeitpunkt t als Differenz der aufgezinsten Schuld bis t und der aufgezinsten Annuitätenzahlungen der Teilaufgabe a) bis zum Zeitpunkt t ergibt.
(10 min)

c) Aktuar Z schließt nun eine n-jährige Risikolebensversicherung ab, deren Auszahlung im Todesfall sich kongruent zur Restschuld nach Teilaufgabe b) entwickelt. Stellen Sie den Leistungsbarwert LBW_{DRL} dieser Todesfallversicherung in Abhängigkeit von der gestutzten Lebensdauer $CT = CT_x$ dar!

Bestimmen Sie den korrespondierenden erwarteten Leistungsbarwert. Verwenden Sie dabei die Größe ${}_{t|}q_x$!

(12 min)

<u>Lösungsskizze:</u>

a) Barwert der nachschüssigen Rückzahlungen (q = 1 + r)

$$Aq^{-1} + Aq^{-2} + \ldots + Aq^{-n}$$

$$= Aq^{-n}(q^{n-1} + \ldots + q + 1) = A\frac{q^n - 1}{q^n(q - 1)}$$

Damit gilt

$$S_0 = A\,\frac{q^n - 1}{q^n(q - 1)}$$

und hieraus folgt

$$A = S_0\,\frac{q^n\,(q - 1)}{q^n - 1}$$

b) Nach Hinweis gilt ($q = 1 + r$)

$$RS_t = S_0\,q^t - A\,(q^{t-1} + \ldots + q + 1)$$

$$= S_0\,q^t - A\,\frac{q^t - 1}{q - 1}$$

$$= S_0\,q^t - S_0\,\frac{q^n\,(q - 1)}{q^n - 1} \cdot \frac{q^t - 1}{q - 1}$$

$$= S_0\left[q^t - \frac{q^n(q^t - 1)}{q^n - 1}\right]$$

$$= S_0\,\frac{q^t\,(q^n - 1) - q^n\,(q^t - 1)}{q^n - 1}$$

$$= S_0\,\frac{q^n - q^t}{q^n - 1}$$

c) Ist t der Todeszeitpunkt, so erfolgt eine Zahlung der Höhe RS_t. Der Todeszeitpunkt in Termen der gestutzten Lebensdauer entspricht $CT + 1$. Damit ist für $CT = 0, \ldots, n-1$ der Barwert der Zahlung in $t = CT + 1$ gegeben durch

$$RS_{CT+1} \cdot q^{-(CT+1)} = S_0\,\frac{q^n - q^{CT+1}}{q^n - 1}\,q^{-(CT+1)}$$

$$= S_0\,\frac{q^{n-(CT+1)} - 1}{q^n - 1} = S_0\,\frac{q^{n-1-CT} - 1}{q^n - 1}$$

Insgesamt gilt

$$LBW = \begin{cases} S_0\,\dfrac{q^{n-1-CT} - 1}{q^n - 1} & CT = 0, \ldots, n - 1 \\ 0 & CT \geq n \end{cases}$$

und ferner

$$E(LBW) = \frac{S_0}{q^{n-1}} \sum_{t=0}^{n-1} (q^{n-1-CT} - 1)\; P(CT = t)$$

$$= \frac{S_0}{q^{n-1}} \sum_{t=0}^{n-1} (q^{n-1-CT} - 1)\; {}_{t|}q_x$$

Aufgabe 4: (18 min)

a) Versicherungsunternehmen AAA verkauft eine einjährige aktienindexgebundene Lebensversicherung zur Gesamtprämie EUR 10 000 an einen x-jährigen Kunden. Die Modalitäten der Versicherung in Bezug auf den Erlebensfall lauten wie folgt:
Es wird eine Rückzahlung der Gesamtprämie garantiert. Im Falle einer <u>negativen</u> DAX-Entwicklung erhält der Versicherte einen Bonus von 50% auf die einjährige DAX-Rendite bezogen auf einen maßgeblichen Investitionsbetrag in Höhe von EUR 9 500.

Das Unternehmen sieht sich der folgenden Anlagesituation in t = 0 gegenüber: Es herrscht ein sicherer Zins von 5%, der DAX steht bei 4 750 und einjährige DAX-Puts mit einem Ausübungspreis von 4 750 weisen eine Optionsprämie von EUR 260 auf.

i) Wie lautet das Leistungsprofil der Erlebensfallleistung in t = 1?

ii) Welche Option ist in diesem Leistungsprofil eingebettet?

iii) Wie lautet der marktkonsistente Wert dieses Leistungsprofils in t = 0?

iv) Welche faire Prämie resultiert hieraus?

v) Welcher Betrag verbleibt dem Unternehmen zur Deckung einer Todesfallleistung und von Betriebskosten?

(8 min)

b) Alternativ wird das Leistungsprofil der aktienindexgebundenen Lebensversicherung im Erlebensfall unter a) wie folgt festgelegt:
Auf einen Betrag in Höhe von EUR 9 500 wird eine garantierte Mindestverzinsung von 4% gewährt. Alternativ kommt im Falle einer <u>positiven</u> DAX-Entwicklung eine 50%-ige Partizipation zum Zuge, bezogen auf einen maßgeblichen Investitionsbetrag von EUR 9 500 – jedoch nur, wenn dies zu einer höheren Auszahlung führt.

i) Wie lautet das Leistungsprofil der Erlebensfallleistung in t = 1?

ii) Welche Option ist in diesem Leistungsprofil eingebettet?

iii) Wie lautet der marktkonsistente Wert dieses Leistungsprofils in t = 0?

(10 min)

Lösungsskizze:

a) i) Rückzahlungsprofil in t = 1 (DAX(0) = 4750)

$$L_1 = \max\{10000,\ 10000 - 9500 \cdot 0{,}5\ \frac{DAX(1) - DAX(0)}{DAX(0)}\}$$

$$= \max\{10000,\ 10000 + 4750 - DAX(1)\}$$

ii) $L_1 = 10000 + \max\{4750 - DAX(1), 0\}$

Eingebettet ist ein einjähriger DAX-Put mit Ausübungspreis X = 4750.

iii) $L_1 = 10000(1{,}05)^{-1} + 260$

$= 9523{,}81 + 260 = 9783{,}81$

iv) $9783{,}81 \cdot p_x$

v) $10000 - 9783{,}81 \cdot p_x$.

b) i) Rückzahlungsprofil in t = 1

$$L_1 = \max\{1.04 \cdot 9500, 9500 + 9500 \cdot 0{,}5 \frac{DAX(1) - DAX(0)}{DAX(0)}\}$$

$$= \max\{9880, 9500 + (DAX(1) - 4750)\}$$

ii) Zerlegung des Rückzahlungsprofils:

$$L_1 = 9500 + \max(380, DAX(1) - 4750)$$

$$= 9500 + \max(DAX(1) - 4750 - 380, 0) + 380$$

$$= 9880 + \max(DAX(1) - 5130, 0)$$

Eingebettet ist ein einjähriger DAX-Call mit einem Ausübungspreis in Höhe von X = 5130.

iii) Fairer Wert L_0 in t = 0:

$$L_0 = 9880(1.05)^{-1} + C_0(5130) = 9409.52 + C_0(5130).$$

Dabei bezeichnet $C_0(5130)$ den Marktpreis eines einjährigen DAX-Calls mit Ausübungspreis X = 5130 in t = 0.