Formelsammlung

Eigenschaften von Zufallsvariablen

X sei eine (diskrete oder stetige) Zufallsvariable.

- Verteilungsfunktion: $F_X(x) = P(X \leq x)$
- Dichtefunktion: $f_X(x) = F'_x(x)$
  bei differenzierbarer Verteilungsfunktion (stetige Zufallsvariable)
- Zähldichte, Frequenz- oder Massefunktion: $f_X(x) = P(X = x)$
  bei diskreten Zufallsvariablen
- Layer-Identität:

  $$\min(\max(X-a;0);l) = \min(X;a+l) - \min(X;a) = \max(X-a;0) - \max(X-(a+l);0)$$

Momente von Zufallszahlen

- n-tes Moment (für $n \in \mathbb{N}_0$): $\mathrm{E}\left[X^n\right] = \int_{(-\infty,\infty)} x^n \mathrm{d}F(x)$
  - bei stetigen Zufallsvariablen: $\mathrm{E}\left[X^n\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \cdot f(x)\mathrm{d}x$
  - bei diskreten Zufallsvariablen: $\mathrm{E}\left[X^n\right] = \sum_x x^n \cdot f_X(x)$
- Erwartungswert (erstes Moment von X): $\mathrm{E}[X] = \mathrm{E}\left[X^1\right]$
- Für den Fall, dass man es mit einer Mischform stetiger und diskreter Verteilungen zu tun hat, eignet sich die folgende Formel:

  $$\mathrm{E}[X] = \int_0^{\infty} (1 - F(x))\mathrm{d}x,$$

  wenn X nichtnegativ ist.
- n-tes zentrales Moment: $\mathrm{E}[(X - \mathrm{E}[X])^n]$ für $n \in \mathbb{N}_0$
- Varianz (2. zentrales Moment von X):

  $$\mathrm{Var}[X] = \mathrm{E}\left[(X-\mathrm{E}[X])^2\right] = \mathrm{E}\left[X^2\right] - (\mathrm{E}[X])^2$$

- Standardabweichung: $\sigma[X] = \sqrt{\mathrm{Var}[X]}$
- Variationskoeffizient für $\mathrm{E}[X] > 0$:

  $$\mathrm{Vko}[X] = \frac{\sigma[X]}{\mathrm{E}[X]} = \frac{\sqrt{\mathrm{Var}[X]}}{\mathrm{E}[X]}$$

- Absolute Schiefe (3. zentrales Moment von X): $\mathrm{E}\left[(X - \mathrm{E}[X])^3\right]$
- (Relative) Schiefe für $\sigma[X] > 0$:

  $$\gamma[X] = \frac{\mathrm{E}\left[(X-\mathrm{E}[X])^3\right]}{\sqrt{(\mathrm{Var}[X])^3}} = \frac{\mathrm{E}\left[(X-\mathrm{E}[X])^3\right]}{(\sigma[X])^3}$$

- in s gestutztes n-tes Moment (mit $n \in \mathbb{N}_0$ und $s \in \mathbb{R}$):

  $$\mathrm{E}[X^n | X > s] = \frac{\mathrm{E}[X^n \cdot 1_{(s,\infty)}(X)]}{P(X > s)} = \frac{\int_{(s,\infty)} x^n \mathrm{d}F(x)}{1 - F(s)}$$

Transformierte von Zufallsvariablen

- Charakteristische Funktion: $\psi_X(t) = \mathrm{E}\left[e^{itX}\right]$ mit $t \in \mathbb{R}$ und i imaginärer Einheit
- Momenterzeugende Funktion:
  - $\mathrm{MEF}_X(t) = \mathrm{E}\left[e^{tX}\right]$, $t \in \mathbb{R}$
  - bei stetigen Zufallsvariablen: $\mathrm{MEF}_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \cdot f(x) \mathrm{d}x$
- (Wahrscheinlichkeits-)Erzeugende Funktion:
  - $m_X(t) = \mathrm{EF}_X(t) = \mathrm{E}\left[t^X\right]$, $t \in [0,1]$
  - bei diskreten Zufallsvariablen: $m_X(t) = \sum_x e^{tx} \cdot f_X(x)$

Ungleichungen

- Markov (für alle $c > 0$):
  $$P(|X| \geq c) \leq \frac{\mathrm{E}[|X|]}{c}$$
  $$P(|X| \geq c) \leq \frac{\mathrm{E}[h(|X|)]}{h(c)}$$
  für streng monoton wachsende Funktionen h auf $\mathbb{R}^+$
- Tschebychev (für alle $c > 0$):
  $$P(|X - \mathrm{E}[X]| \geq c) \leq \frac{\mathrm{Var}[X]}{c^2}$$
- Cantelli (für alle $c > 0$):
  $$P(X \geq \mathrm{E}[X] + c) \leq \frac{\mathrm{Var}[X]}{c^2 + \mathrm{Var}[X]}$$

Wechselbeziehungen zwischen Zufallsvariablen

Sind A und B Ereignisse mit $P(B) \neq 0$, dann gilt für die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(A|B)$:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Die Verteilung der Zufallsvariable Y, gegeben $X = x$, wird als bedingte Verteilung von Y, gegeben $X = x$, kurz $P_{Y|X=x}$, bezeichnet.
$P_{Y|X=x}$ hat die von x abhängige Verteilungsfunktion

$$F_{Y|X=x}(y) = P(Y \leq y | X = x) = \frac{P(Y \leq y, X = x)}{P(X = x)}$$

Fasst man das bedingende Ereignis als Zufallsvariable X auf, so sind die Momente der bedingten Verteilung von Y, gegeben X, transformierte Zufallsvariablen von X und für diese können ebenfalls Momente berechnet werden.

- Iterativität der Erwartungswerte
  - $\mathrm{E}[\mathrm{E}[Y|X]] = \mathrm{E}[Y]$ für alle X und Y
  - $\mathrm{E}[\mathrm{Var}[Y|X]] + \mathrm{Var}[\mathrm{E}[Y|X]] = \mathrm{Var}[Y]$ für alle X und Y
- Kovarianz: $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}[(X - \mathrm{E}[X]) \cdot (Y - \mathrm{E}[Y])] = \mathrm{E}[X \cdot Y] - \mathrm{E}[X] \cdot \mathrm{E}[Y]$
- Korrelationskoeffizient:
  $$\rho_{XY} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}[X] \cdot \mathrm{Var}[Y]}} = \mathrm{Cov}\left(\frac{X - \mathrm{E}[X]}{\sqrt{\mathrm{Var}[X]}}, \frac{Y - \mathrm{E}[Y]}{\sqrt{\mathrm{Var}[Y]}}\right) \in [-1, 1]$$

Summen von Zufallsvariablen

- Faltung: Sind X und Y stochastisch unabhängig, so ist die Verteilung der Summe $X+Y$ durch die Faltung $P_X * P_Y$ der Verteilungen P_X und P_Y gegeben:
  - Stetige Faltungsformel
  $$(P_X * P_Y)(A) = \int_A \left(\int_{\mathbb{R}} f_X(x) \cdot f_Y(z-x) \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}z$$
  mit $A \subset \mathbb{R}$, wenn $X,\ Y$ stetige Zufallsvariablen mit Dichten f_X bzw. f_Y sind.
  - Diskrete Faltungsformel
  $$(P_X * P_Y)(\{n\}) = P(X+Y=n) = \sum_{k=0}^{n} P(X=k) \cdot P(Y=n-k)$$
  mit $n \in \mathbb{N}_0$, wenn $X,\ Y$ diskrete Zufallsvariablen auf $\mathbb{N}_0$ sind.
- Zufallssummen:
  N sei eine diskrete Zufallsvariable auf $\{0, 1, 2, ...\}$ und S eine Zufallssumme mit paarweise stochastisch unabhängig, identisch wie X verteilten X_i, die stochastisch unabhängig von N sind.
  - 1. Gleichung von Wald: $\mathrm{E}[S] = \mathrm{E}[N] \cdot \mathrm{E}[X]$
  - 2. Gleichung von Wald: $\mathrm{Var}[S] = \mathrm{E}[N] \cdot \mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[N] \cdot (\mathrm{E}[X])^2$
- Fundamentalformeln:
  $$\psi_S(t) = m_N(\psi_X(t)) \qquad \text{für alle } t \in \mathbb{R}$$
  $$\mathrm{MEF}_S(t) = m_N(\mathrm{MEF}_X(t)) \qquad \text{für alle } t \in \mathbb{R}$$
  $$m_S(t) = m_N(m_X(t)) \qquad \text{für alle } t \in [0,1]$$
  X diskret verteilt auf $\{0, \Delta, 2\Delta, ...\}$, $\Delta > 0$
- Zusammengesetzte Poisson-Verteilung
  (Spezialfall einer Verteilung einer Zufallssumme)
  - Definition: $\mathrm{ZPV}(\lambda, P_X) = P_S$ mit
  $$S = \sum_{i=1}^{N} X_i$$
  mit $X_i \sim P_X$, $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$
  - Erwartungswert: $\mathrm{E}[S] = \lambda \cdot \mathrm{E}[X]$
  - Varianz: $\mathrm{Var}[S] = \lambda \cdot \mathrm{E}[X^2]$
  - Absolute Schiefe:
  $$\mathrm{E}\left[(S - \mathrm{E}[S])^3\right] = \lambda \cdot \mathrm{E}[X^3]$$
  - Relative Schiefe:
  $$\gamma[S] = \frac{\mathrm{E}[X^3]}{\sqrt{\lambda \cdot (\mathrm{E}[X^2])^3}}$$
- Normal-Power-Approximation:
  Es sei U eine Zufallsvariable mit existierenden Momenten $\mu = \mathrm{E}[U]$, $\sigma^2 = \mathrm{Var}[U] > 0$, $\gamma = \gamma[U] > 0$. Dann gilt die Näherung:
  $$P(U \leq u) \approx \Phi\left(\frac{1}{\gamma} \cdot \left(\sqrt{\gamma^2 + 6 \cdot \gamma \cdot \frac{u-\mu}{\sigma} + 9} - 3\right)\right)$$

B. Verteilungen

Diskrete Verteilungen

Bezeichnung/ Kurz~/Parameter	Zähldichte $p_k = P(N=k)$	Rekursion für Zähldichte	Erwartungs-wert	Varianz	Schiefe	(Wahrscheinlichkeits-) Erzeugende Funktion
Poisson-verteilung $\mathcal{P}(\lambda)$ $(\lambda > 0)$	$p_k = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$ $(k \in \mathbb{N}_0)$	$p_k = \frac{\lambda}{k} \cdot p_{k-1}$ $(k \in \mathbb{N})$ $p_0 = e^{-\lambda}$	λ	λ	$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$	$e^{\lambda \cdot (t-1)}$
Binomial-verteilung $B(m,\theta)$ $(m \in \mathbb{N}, \theta \in (0,1))$	$p_k = \binom{m}{k} \cdot \theta^k \cdot (1-\theta)^{m-k}$ $(k = 0,\dots,m)$	$p_k = \frac{m-k+1}{k} \cdot \frac{\theta}{1-\theta} \cdot p_{k-1}$ $(k = 1,\dots,m)$ $p_0 = (1-\theta)^m$	$m \cdot \theta$	$m \cdot \theta \cdot (1-\theta)$	$\frac{1-2\cdot\theta}{\sqrt{m \cdot \theta \cdot (1-\theta)}}$	$[\theta \cdot t + (1-\theta)]^m$
Negative Binomial-Verteilung $NB(\beta,\theta)$ $(\beta > 0, \theta \in (0,1))$	$p_k = \binom{\beta+k-1}{k} \cdot \theta^k \cdot (1-\theta)^\beta$ $(k \in \mathbb{N}_0)$	$p_k = \frac{\beta+k-1}{k} \cdot \theta \cdot p_{k-1}$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ $p_0 = (1-\theta)^\beta$	$\beta \cdot \frac{\theta}{1-\theta}$	$\beta \cdot \frac{\theta}{(1-\theta)^2}$	$\frac{1+\theta}{\sqrt{\beta \cdot \theta}}$	$\left[\frac{1-\theta}{1-\theta \cdot t}\right]^\beta$

Stetige Verteilungen (I)

Bezeichnung/ Kurz~/Parameter	**Dichte**	**Verteilungs-funktion**	**Erwartungs-wert**	**Varianz**	**Schiefe**	**Moment-erzeugende Funktion**	**Gestutzte Momente** $E\left[X^n \middle\| X > s\right]$
stetige Gleichverteilung $\mathcal{U}(a,b)$ $(a<b,\, a,b\in\mathbb{R})$	$\frac{1}{b-a}\cdot 1_{(a,b)}(x)$ $(x\in\mathbb{R})$	$\begin{cases} 0 & x\le a \\ \frac{x-a}{b-a} & a<x\le b \\ 1 & x>b \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	0	$\begin{cases} 1 & t=0 \\ \frac{e^{bt}-e^{at}}{(b-a)\cdot t} & t\ne 0 \end{cases}$	$\frac{b^{n+1}-s^{n+1}}{(n+1)\cdot(b-s)}$ $(s\in(a,b))$
Gamma-verteilung $\Gamma(a,b)$ $(a,b\in(0,\infty))$	$\frac{a^b}{\Gamma(b)}\cdot e^{-ax}\cdot x^{b-1}$ $(x>0)$	$\underbrace{\frac{a^b}{\Gamma(b)}\cdot\int_0^x e^{-at}\cdot t^{b-1}\,dt}_{=:\Gamma_x(a,b)}$ $(x\ge 0)$	$\frac{b}{a}$	$\frac{b}{a^2}$	$\frac{2}{\sqrt{b}}$	$\left(\frac{a}{a-t}\right)^b$ $(t<a)$	$\frac{\Gamma(b+n)\cdot(1-\Gamma_s(a,b+n))}{a^n\cdot\Gamma(b)\cdot(1-\Gamma_s(a,b))}$
Exponential-verteilung $Exp(a)$ $(a>0)$	$a\cdot e^{-ax}$ $(x\in\mathbb{R})$	$1-e^{-ax}$ $(x\ge 0)$	$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{a^2}$	2	$\frac{a}{a-t}$ $(t<a)$	$\frac{n!}{a^n}\cdot\sum_{k=0}^{n}\frac{(as)^k}{k!}$
Normalverteilung $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ $(\mu\in\mathbb{R},\sigma^2>0)$	$\frac{e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\cdot(x-\mu)^2}}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}$ $(x\in\mathbb{R})$	$\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ $(x\in\mathbb{R})$	μ	σ^2	0	$e^{nt+\frac{1}{2}n^2\sigma^2}$	(2-Schritt-Rekursion)

Stetige Verteilungen (II)

Bezeichnung/ Kurz~/Parameter	**Dichte**	**Verteilungs-funktion**	**Erwartungs-wert**	**Varianz**	**Schiefe**	**Moment-erzeugende Funktion**	**Gestutzte Momente** $E\left[X^n \mid X>s\right]$
Lognormal-verteilung $LN\left(\mu,\sigma^2\right)$ $\left(\mu\in\mathbb{R},\sigma^2>0\right)$	$\dfrac{e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\cdot(\ln(x)-\mu)^2}}{\sqrt{2\pi}\cdot x\cdot\sigma}$ $(x>0)$	$\Phi\left(\dfrac{\ln(x)-\mu}{\sigma}\right)$ $(x>0)$	$e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$	$e^{2\mu+\sigma^2}\cdot\left(e^{\sigma^2}-1\right)$	$\sqrt{e^{\sigma^2}-1}\cdot\left(e^{\sigma^2}+2\right)$	—	$e^{n\mu+\frac{1}{2}n^2\sigma^2}\cdot\dfrac{1-\Phi\left(\frac{\ln(s)-\mu}{\sigma}-n\sigma\right)}{1-\Phi\left(\frac{\ln(s)-\mu}{\sigma}\right)}$
(European) Pareto-Verteilung $Par(a,b)$ $\left(a,b\in(0,\infty)\right)$	$\dfrac{b}{a}\cdot\left(\dfrac{a}{x}\right)^{b+1}$ $(x>a)$	$1-\left(\dfrac{a}{x}\right)^b$ $(x>a)$	$\dfrac{a\cdot b}{b-1}$ $(b>1)$	$\dfrac{a^2\cdot b}{(b-1)^2\cdot(b-2)}$ $(b>2)$	$\dfrac{2\cdot(b+1)\cdot\sqrt{b-2}}{(b-3)\cdot\sqrt{b}}$ $(b>3)$	existiert nicht	$\dfrac{b\cdot s^n}{b-n}$ $(s>a,b>n)$
um –*a* verschobene (American) Pareto-Verteilung $Par_0(a,b)$ $\left(a,b\in(0,\infty)\right)$	$\dfrac{b}{a}\cdot\left(\dfrac{a}{a+x}\right)^{b+1}$ $(x>0)$	$1-\left(\dfrac{a}{a+x}\right)^b$ $(x>a)$	$\dfrac{a}{b-1}$ $(b>1)$				$a^n b\cdot\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot\dfrac{(-1)^{n-k}}{b-k}\cdot\left(1+\dfrac{s}{a}\right)^k$