Formel- und Tabellensammlung zum Aktuariellen Grundwissen

„Schadenversicherungsmathematik“

A. Zufallsvariablen

X, Y seien (diskrete oder stetige) **Zufallsvariablen**.

Verteilungsfunktion: $F(x) = P(X \le x)$

(Verteilungs-)**Dichte:** $f(x) = F'(x)$ bei differenzierbarer Verteilungsfunktion (stetigen Zufallsvariablen)

Zähldichte, Frequenz- oder **Massefunktion**:
$f_x = P(X = x)$ bei diskreten Zufallsvariablen

Layer-Identität: $\min(\max(X-a;0);h) = \min(X;a+h) - \min(X;a) = \max(X - a;0) - \max(X - (a+h);0)$

Momente von Zufallsvariablen

***n*-tes Moment:** $E\left[X^n\right] = \int\limits_{(-\infty,\infty)} x^n \, dF(x) \quad n \in \mathbb{N}_0$

$E\left[X^n\right] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^n f(x)\, dx$ bei differenzierbarer Verteilungsfunktion

bzw. $E\left[X^n\right] = \sum\limits_x x^n \cdot f_x$ bei diskreter Verteilungsfunktion

Erwartungswert: $E[X] = E\left[X^1\right] =$ erstes Moment von X

Für den Fall, dass man es mit einer Mischform stetiger und diskreter Verteilungen zu tun hat, eignet sich die folgende Formel:

$E[X] = \int\limits_0^{\infty} (1 - F(x))\, dx$, wenn X nichtnegativ ist.

***n*-tes <u>zentrales</u> Moment:** $E\left[(X - E[X])^n\right] \quad n \in \mathbb{N}_0$

Varianz: $\mathrm{var}[X] = E\left[(X - E[X])^2\right] = E\left[X^2\right] - (E[X])^2$
= 2. zentrales Moment von X

Standardabweichung: $\sigma[X] = \sqrt{\mathrm{var}[X]}$

Variationskoeffizient: $v[X] = \frac{\sigma[X]}{E[X]} = \frac{\sqrt{\text{var}[X]}}{E[X]} \qquad (\text{für } E[X] > 0)$

Absolute Schiefe: $E\left[\left(X - E[X]\right)^3\right]$ = 3. zentrales Moment von X

(Relative) Schiefe: $\gamma[X] = \frac{E\left(\left(X - E[X]\right)^3\right)}{\sqrt{\left(\text{var}[X]\right)^3}}$

In *s* <u>gestutztes</u> *n*-tes Moment: $E\left[X^n \middle| X > s\right] = \frac{\int_{(s,\infty)} x^n \, dF(x)}{1 - F(s)} \qquad n \in \mathbb{N}_0, s \in \mathbb{R}$

<u>**Transformierte** von Zufallsvariablen</u>

Charakteristische Funktion: $\varphi_X(t) = CF_X(t) = E\left[e^{itX}\right] \quad t \in \mathbb{R} \quad i$ = imaginäre Einheit

Momenterzeugende Funktion: $MEF_X(t) = E\left[e^{tX}\right] \quad t \in \mathbb{R}$

$MEF_X(t) = \int e^{tx} \cdot f(x) \, dx$ bei differenzierbarer Verteilungsfkt.

(Wahrscheinlichkeits-)Erzeugende Funktion:

$m_X(t) = EF_X(t) = E\left[t^X\right] \quad t \in [-1,1]$

$m_X(t) = \sum_x t^x \cdot f_x$ bei diskreter Verteilungsfunktion

<u>**Ungleichungen**</u>

Markov: $P(|X| \geq c) \leq \frac{E[|X|]}{c} \quad \forall c > 0$

$P(|X| \geq c) \leq \frac{E\left[h(|X|)\right]}{h(c)} \quad \forall c > 0, h: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ streng monoton wachsend

Tschebyschev: $P\left(\left|X - E[X]\right| \geq c\right) \leq \frac{\text{var}[X]}{c^2} \quad \forall c > 0$

Cantelli: $P\left(X \geq E[X] + c\right) \leq \frac{\text{var}[X]}{c^2 + \text{var}[X]} \quad \forall c > 0$

Wechselbeziehungen bei Zufallsvariablen

Sind A und B Ereignisse mit $P(B) \neq 0$, dann gilt für die **bedingte Wahrscheinlichkeit** $P(A|B)$:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Die Zufallsvariable $Y|X = x$ hat die von x abhängige Verteilungsfunktion

$$y \mapsto F(y|x) = P(Y \leq y|X = x) = \frac{P(Y \leq y, X = x)}{P(X = x)}.$$

Die Verteilung von Y, gegeben X=x, wird als **bedingte Verteilung** und mit $P_{Y|X=x}$ bezeichnet.

Fasst man das bedingende Ereignis als Zufallsvariable X auf, so sind die Momente der bedingten Verteilung von Y, gegeben X, transformierte Zufallsvariablen von X und für diese können ebenfalls Momente berechnet werden:

Iterativität der Erwartungswerte:

$$E\big[E[Y|X]\big] = E[Y] \qquad \forall X, Y$$

$$E\big[\operatorname{var}[Y|X]\big] + \operatorname{var}\big[E[Y|X]\big] = \operatorname{var}[Y].$$

Kovarianz:

$$\operatorname{cov}[X,Y] = E\big[(X - E[X]) \cdot (Y - E[Y])\big] = E[X \cdot Y] - E[X] \cdot E[Y]$$

Korrelation(skoeffizient):

$$\rho_{X,Y} = \frac{\operatorname{cov}[X,Y]}{\sqrt{\operatorname{var}[X] \cdot \operatorname{var}[Y]}} = \operatorname{cov}\left[\frac{X - E[X]}{\sqrt{\operatorname{var}[X]}}, \frac{Y - E[Y]}{\sqrt{\operatorname{var}[Y]}}\right] \in [-1,1]$$

Summen von Zufallsvariablen

Faltung: Sind X und Y stochastisch unabhängig, so ist die Verteilung der Summe X+Y durch die Faltung $P_X * P_Y$ der Verteilungen P_X und P_Y gegeben:

Stetige Faltungsformel:

$$(P_X * P_Y)(A) = \int_A \left(\int_{\mathbb{R}} f_X(x) \cdot f_Y(z - x)\, dx \right) dz \qquad A \subset \mathbb{R},$$

wenn X, Y stetige Zufallsvariablen mit Dichten f_X bzw. f_Y sind

Diskrete Faltungsformel:

$$(P_X * P_Y)(\{n\}) = P(X + Y = n) = \sum_{k=0}^{n} P(X = k) \cdot P(Y = n - k) \qquad n \in \mathbb{N}_0,$$

wenn X, Y diskrete Zufallsvariablen auf $\mathbb{N}_0 = \{0,1,2,...\}$ sind

Zufallssummen

N sei eine diskrete Zufallsvariable auf $\{0,1,2,\ldots\}$ und S eine **Zufallssumme** $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$ mit paarweise stochastisch unabhängigen, identisch wie X verteilten X_i, die stochastisch unabhängig von N sind:

1. Gleichung von Wald: $E[S] = E[X] \cdot E[N]$

2. Gleichung von Wald: $\operatorname{var}[S] = E[N] \cdot \operatorname{var}[X] + \operatorname{var}[N] \cdot (E[X])^2$

Fundamentalformel(n):

$$\varphi_S(t) = m_N(\varphi_X(t)) \quad t \in \mathbb{R}$$
$$MEF_S(t) = m_N(MEF_X(t)) \quad t \in \mathbb{R}$$
$$m_S(t) = m_N(m_X(t)) \quad t \in [-1,1]; \quad N,\ X \text{ diskret auf } \{0, \Delta, 2\Delta, ...\}, \Delta > 0$$

Zusammengesetzte Poisson-Verteilung = Spezialfall einer Verteilung einer Zufallssumme

$$ZPV(\lambda, P_X) = P_S \quad \text{mit } S = \sum_{i=1}^{N} X_i \text{ mit } X_i \sim P_X, N \sim \pi(\lambda)$$

$$E[S] = \lambda \cdot E[X]$$
$$\operatorname{var}[S] = \lambda \cdot E[X^2]$$
$$E\left[(S - E[S])^3\right] = \lambda \cdot E[X^3]$$
$$\gamma[S] = \frac{E[X^3]}{\sqrt{\lambda \cdot (E[X^2])^3}}$$
$$E\left[(S - E[S])^4\right] = \lambda \cdot E[X^4] + 3 \cdot \lambda^2 \cdot (E[X^2])^2$$

<u>Normal-Power-Approximation</u>

Es sei *U* eine Zufallsvariable *U* mit existierenden Momenten $\mu = E[U], \sigma^2 = \operatorname{var}[U], \gamma = \gamma[U] > 0$

$$P(U \le u) \approx \Phi\left(\frac{1}{\gamma} \cdot \left(\sqrt{\gamma^2 + 6\gamma \cdot \frac{u - \mu}{\sigma} + 9} - 3\right)\right)$$

<u>Anpassungskoeffizient und Ruinwahrscheinlichkeit</u>

Zu gegebenen Parametern *c* (Prämie), $\lambda = E[N] > 0$ und Schadenhöhenverteilung *Q* berechnet sich der **Anpassungskoeffizient *R*** als positive Lösung der Gleichung

$$\lambda + Rc = \lambda \int e^{Rx} Q(dx).$$

Für $Q = \operatorname{Exp}(1/\mu)$ ist mit $\theta = \dfrac{c - \lambda\mu}{\lambda\mu}$

$$R = \frac{1}{\mu} \frac{\theta}{1+\theta}.$$

In diesem Fall ergibt sich für die **Ruinwahrscheinlichkeit $\psi(s)$** zum Startkapital (Anfangsreserve) *s*

$$\psi(s) = \frac{1}{1+\theta} exp\left(-\frac{s}{\mu} \cdot \frac{\theta}{1+\theta}\right).$$

Diskrete Verteilungen

Bezeichnung/ Kurz~/Parameter	Zähldichte $p_k = P(\{N=k\})$	Rekursion	Erwartungs-wert	Varianz	Schiefe	(Wahrscheinlich-keits-) Erzeugende Funktion
diskrete Gleichverteilung $U(m)$ $(m \in \mathbb{N})$	$\frac{1}{m+1}$ $(k=0,1,\dots,m)$	—	$\frac{m}{2}$	$\frac{m\cdot(m+2)}{12}$	0	$\frac{1-s^{m+1}}{(m+1)\cdot(1-s)}$
Poisson-verteilung $\pi(\lambda)$ $(\lambda>0)$	$\frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda}$ $(k\in\mathbb{N}_0)$	$p_k = \frac{\lambda}{k}\cdot p_{k-1}$ $(k\in\mathbb{N})$, $p_0 = \mathrm{e}^{-\lambda}$	λ	λ	$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$	$e^{\lambda\cdot(s-1)}$
Binomial-verteilung $\mathrm{B}(m,\theta)$ $(m\in\mathbb{N},\theta\in(0,1))$	$\binom{m}{k}\cdot\theta^k\cdot(1-\theta)^{m-k}$ $(k=0,1,\dots,m)$	$p_k = \frac{m-k+1}{k}\cdot\frac{\theta}{1-\theta}\cdot p_{k-1}$ $(k=1,2,\dots,m)$ $p_0=(1-\theta)^m$	$m\cdot\theta$	$m\cdot\theta\cdot(1-\theta)$	$\frac{1-2\theta}{\sqrt{m\cdot\theta\cdot(1-\theta)}}$	$[\theta\cdot s+(1-\theta)]^m$
Negative Binomial-Verteilung $\mathrm{NB}(\beta,\theta)$ $(\beta>0,\quad\theta\in(0,1))$	$\binom{\beta+k-1}{k}\cdot(1-\theta)^{\beta}\cdot\theta^k$ $(k\in\mathbb{N}_0)$	$p_k = \frac{\beta+k-1}{k}\cdot\theta\cdot p_{k-1}$ $(k\in\mathbb{N})$, $p_0=(1-\theta)^{\beta}$	$\beta\cdot\frac{\theta}{1-\theta}$	$\beta\cdot\frac{\theta}{(1-\theta)^2}$	$\frac{1+\theta}{\sqrt{\beta\cdot\theta}}$	$\left[\frac{1-\theta}{1-\theta\cdot s}\right]^{\beta}$
gemischte Poisson-verteilung $G\Pi(\Lambda)$ $(\Lambda>0\ \text{Zva})$	$\int e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}P_\Lambda(d\lambda)$ $(k\in\mathbb{N}_0)$	—	$E[\Lambda]$	$E[\Lambda]+\mathrm{var}[\Lambda]$	$\frac{\beta[\Lambda]+3\,\mathrm{var}[\Lambda]+E[\Lambda]}{(E[\Lambda]+\mathrm{var}[\Lambda])^{3/2}}$ $\beta[\Lambda]=E\left[(\Lambda-E[\Lambda])^3\right]$	$\mathrm{MEF}_\Lambda(\mathrm{s}-1)$

Stetige Verteilungen

Bezeichnung/ Kurz~/Parameter	Dichte	Verteilungsfunktion	Erwartungs-wert	Varianz	Schiefe	Moment-erzeugende Funktion	Gestutzte Momente $E\left[X^n \middle| X > s\right]$
stetige Gleichverteilung $U(a,b)$ $(a<b)$	$\frac{1}{b-a}\cdot 1_{(a,b)}(x)$ $(x\in\mathbb{R})$	$\frac{x-a}{b-a}\cdot 1_{(a,b]}(x)+1_{(b,\infty)}(x)$ $(x\geq 0)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	0	$\begin{cases} 1 & t=0 \\ \frac{e^{bt}-e^{at}}{t(b-a)} & t\neq 0 \end{cases}$	$\frac{b^{n+1}-s^{n+1}}{(n+1)\cdot(b-s)}$ $s\in(a,b)$
Gamma-verteilung $\Gamma(a,b)$ $(a,b>0)$	$\frac{a^b}{\Gamma(b)}e^{-ax}x^{b-1}$ $(x>0)$	$\Gamma(x;a,b)=\frac{a^b}{\Gamma(b)}\cdot\int_0^x e^{-at}\cdot t^{b-1}\,dt$ $(x\geq 0)$	$\frac{b}{a}$	$\frac{b}{a^2}$	$\frac{2}{\sqrt{b}}$	$\left(\frac{a}{a-t}\right)^b \quad (t<a)$	$\frac{\Gamma(b+n)\cdot(1-\Gamma(s;a,b+n))}{a^n\cdot\Gamma(b)\cdot(1-\Gamma(s;a,b))}$
Exponential-verteilung $\mathrm{Exp}(a)=\Gamma(a,1)$ $(a>0)$	$a\cdot e^{-ax}$ $(x>0)$	$1-e^{-ax}$ $(x\geq 0)$	$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{a^2}$	2	$\frac{a}{a-t} \quad (t<a)$	$\frac{n!}{a^n}\cdot\sum_{k=0}^{n}\frac{(as)^k}{k!}$
Weibull-verteilung $W(a,b)$ $(a,b>0)$	$ab\cdot e^{-ax^b}\cdot x^{b-1}$ $(x>0)$	$1-e^{-ax^b}$ $(x\geq 0)$	$\frac{\Gamma(1+\frac{1}{b})}{a^{1/b}}$	$\frac{\Gamma(1+\frac{2}{b})-\Gamma(1+\frac{1}{b})^2}{a^{2/b}}$	—	—	—
Lognormal-verteilung $LN(\mu,\sigma^2)$ $(\mu\in\mathbb{R},\sigma^2>0)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln(x)-\mu)^2}$ $(x>0)$	$\Phi\left(\frac{\ln(x)-\mu}{\sigma}\right)$ $(x>0)$	$e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$	$e^{2\mu+\sigma^2}\cdot\left(e^{\sigma^2}-1\right)$	$\sqrt{e^{\sigma^2}-1}\cdot\left(e^{\sigma^2}+2\right)$	—	$e^{n\mu+\frac{1}{2}n^2\sigma^2}\cdot\frac{1-\Phi\left(\frac{\ln(s)-\mu}{\sigma}-n\sigma\right)}{1-\Phi\left(\frac{\ln(s)-\mu}{\sigma}\right)}$

Bezeichnung/ Kurz~/Parameter	**Dichte**	**Verteilungsfunktion**	**Erwartungs-Wert**	**Varianz**	**Schiefe**	**Moment-erzeugende Funktion**	**Gestutzte Momente** $E\left[X^n \mid X > s\right]$
Loggamma-verteilung $L\Gamma(a,b)$ $(a,b>0)$	$\frac{a^b}{\Gamma(b)} \cdot x^{-a-1} \cdot \ln(x)^{b-1}$ $(x>1)$	$\frac{a^b}{\Gamma(b)} \cdot \int_1^x \frac{\ln(t)^{b-1}}{t^{a+1}}\,dt$ $(x \geq 1)$	$\left(\frac{a}{a-1}\right)^b$ $(a>1)$	$\left(\frac{a}{a-2}\right)^b - \left(\frac{a}{a-1}\right)^{2b}$ $(a>2)$	—	Existiert nicht	—
um –1 verschobene Loggammavtlg. $L\Gamma_0(a,b)$ $(a,b>0)$	$\frac{a^b}{\Gamma(b)} \cdot (x+1)^{-a-1} \cdot \ln(x+1)^{b-1}$ $(x>0)$	$\frac{a^b}{\Gamma(b)} \cdot \int_0^x \frac{\ln(t+1)^{b-1}}{(t+1)^{a+1}}\,dt$ $(x \geq 0)$	$\left(\frac{a}{a-1}\right)^b - 1$ $(a>1)$	$\left(\frac{a}{a-2}\right)^b - \left(\frac{a}{a-1}\right)^{2b}$ $(a>2)$	—	Existiert nicht	—
Pareto-Verteilung $\mathrm{Par}(a,b)$ $(a,b>0)$	$\frac{b}{a} \cdot \left(\frac{a}{x}\right)^{b+1}$ $(x>a)$	$1-\left(\frac{a}{x}\right)^b$ $(x \geq a)$	$\frac{ab}{b-1}$ $(b>1)$	$\frac{ba^2}{(b-1)^2(b-2)}$ $(b>2)$	$\frac{2(b+1)\sqrt{b-2}}{(b-3)\sqrt{b}}$ $(b>3)$	Existiert nicht	$\frac{b \cdot s^n}{b-n}$ $(s>a, b>n)$
um –*a* verschobene Pareto-Verteilung $\mathrm{Par}_0(a,b)$ $(a,b>0)$	$\frac{b}{a} \cdot \left(\frac{a}{x+a}\right)^{b+1}$ $(x>0)$	$1-\left(\frac{a}{x+a}\right)^b$ $(x \geq 0)$	$\frac{a}{b-1}$ $(b>1)$	$\frac{ba^2}{(b-1)^2(b-2)}$ $(b>2)$	$\frac{2(b+1)\sqrt{b-2}}{(b-3)\sqrt{b}}$ $(b>3)$	Existiert nicht	$a^n b \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{n-k}}{b-k}\left(1+\frac{s}{a}\right)^k$ $(s>0, b>n)$
Inverse Gauß-Verteilung $\mathrm{IG}(\lambda,\mu)$ $(\lambda,\mu>0)$	$\sqrt{\frac{\lambda}{2\pi \cdot x^3}} \cdot e^{-\frac{\lambda}{2\mu^2 x}(x-\mu)^2}$ $(x>0)$	$\Phi\left(\sqrt{\frac{\lambda}{x}}\left(\frac{x}{\mu}-1\right)\right)+e^{\frac{2\lambda}{\mu}} \cdot \Phi\left(-\sqrt{\frac{\lambda}{x}}\left(\frac{x}{\mu}+1\right)\right)$ $(x>0)$	μ	$\frac{\mu^3}{\lambda}$	$3\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}$	$e^{\frac{\lambda}{\mu}\left(1-\sqrt{1-\frac{2\mu^2 t}{\lambda}}\right)}$ $(t<\frac{\lambda}{2\mu^2})$	—

Tabelle: Dichtefunktion der Standard-Normalverteilung N(0, 1): $\varphi(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u^2/2}$; $\varphi(u)=\varphi(-u)$

u	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,00	u
0,0	0,398942	0,398922	0,398862	0,398763	0,398623	0,398444	0,398225	0,397966	0,397668	0,397330	0,398942	0,0
0,1	0,396953	0,396536	0,396080	0,395585	0,395052	0,394479	0,393868	0,393219	0,392531	0,391806	0,396953	0,1
0,2	0,391043	0,390242	0,389404	0,388529	0,387617	0,386668	0,385683	0,384663	0,383606	0,382515	0,391043	0,2
0,3	0,381388	0,380226	0,379031	0,377801	0,376537	0,375240	0,373911	0,372548	0,371154	0,369728	0,381388	0,3
0,4	0,368270	0,366782	0,365263	0,363714	0,362135	0,360527	0,358890	0,357225	0,355533	0,353812	0,368270	0,4
0,5	0,352065	0,350292	0,348493	0,346668	0,344818	0,342944	0,341046	0,339124	0,337180	0,335213	0,352065	0,5
0,6	0,333225	0,331215	0,329184	0,327133	0,325062	0,322972	0,320864	0,318737	0,316593	0,314432	0,333225	0,6
0,7	0,312254	0,310060	0,307851	0,305627	0,303389	0,301137	0,298872	0,296595	0,294305	0,292004	0,312254	0,7
0,8	0,289692	0,287369	0,285036	0,282694	0,280344	0,277985	0,275618	0,273244	0,270864	0,268477	0,289692	0,8
0,9	0,266085	0,263688	0,261286	0,258881	0,256471	0,254059	0,251644	0,249228	0,246809	0,244390	0,266085	0,9
1,0	0,241971	0,239551	0,237132	0,234714	0,232297	0,229882	0,227470	0,225060	0,222653	0,220251	0,241971	1,0
1,1	0,217852	0,215458	0,213069	0,210686	0,208308	0,205936	0,203571	0,201214	0,198863	0,196520	0,217852	1,1
1,2	0,194186	0,191860	0,189543	0,187235	0,184937	0,182649	0,180371	0,178104	0,175847	0,173602	0,194186	1,2
1,3	0,171369	0,169147	0,166937	0,164740	0,162555	0,160383	0,158225	0,156080	0,153948	0,151831	0,171369	1,3
1,4	0,149727	0,147639	0,145564	0,143505	0,141460	0,139431	0,137417	0,135418	0,133435	0,131468	0,149727	1,4
1,5	0,129518	0,127583	0,125665	0,123763	0,121878	0,120009	0,118157	0,116323	0,114505	0,112704	0,129518	1,5
1,6	0,110921	0,109155	0,107406	0,105675	0,103961	0,102265	0,100586	0,098925	0,097282	0,095657	0,110921	1,6
1,7	0,094049	0,092459	0,090887	0,089333	0,087796	0,086277	0,084776	0,083293	0,081828	0,080380	0,094049	1,7
1,8	0,078950	0,077538	0,076143	0,074766	0,073407	0,072065	0,070740	0,069433	0,068144	0,066871	0,078950	1,8
1,9	0,065616	0,064378	0,063157	0,061952	0,060765	0,059595	0,058441	0,057304	0,056183	0,055079	0,065616	1,9
2,0	0,053991	0,052919	0,051864	0,050824	0,049800	0,048792	0,047800	0,046823	0,045861	0,044915	0,053991	2,0
2,1	0,043984	0,043067	0,042166	0,041280	0,040408	0,039550	0,038707	0,037878	0,037063	0,036262	0,043984	2,1
2,2	0,035475	0,034701	0,033941	0,033194	0,032460	0,031740	0,031032	0,030337	0,029655	0,028985	0,035475	2,2
2,3	0,028327	0,027682	0,027048	0,026426	0,025817	0,025218	0,024631	0,024056	0,023491	0,022937	0,028327	2,3
2,4	0,022395	0,021862	0,021341	0,020829	0,020328	0,019837	0,019356	0,018885	0,018423	0,017971	0,022395	2,4
2,5	0,017528	0,017095	0,016670	0,016254	0,015848	0,015449	0,015060	0,014678	0,014305	0,013940	0,017528	2,5
2,6	0,013583	0,013234	0,012892	0,012558	0,012232	0,011912	0,011600	0,011295	0,010997	0,010706	0,013583	2,6
2,7	0,010421	0,010143	0,009871	0,009606	0,009347	0,009094	0,008846	0,008605	0,008370	0,008140	0,010421	2,7
2,8	0,007915	0,007697	0,007483	0,007274	0,007071	0,006873	0,006679	0,006491	0,006307	0,006127	0,007915	2,8
2,9	0,005953	0,005782	0,005616	0,005454	0,005296	0,005143	0,004993	0,004847	0,004705	0,004567	0,005953	2,9
3,0	0,004432	0,004301	0,004173	0,004049	0,003928	0,003810	0,003695	0,003584	0,003475	0,003370	0,004432	3,0

Tabelle: Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung N(0, 1): $\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u} e^{-t^2/2} dt \;\; ; \; \Phi(u) = 1 - \Phi(-u)$

u	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	u
0,0	0,500000	0,503989	0,507978	0,511967	0,515953	0,519939	0,523922	0,527903	0,531881	0,535856	0,0
0,1	0,539828	0,543795	0,547758	0,551717	0,555670	0,559618	0,563559	0,567495	0,571424	0,575345	0,1
0,2	0,579260	0,583166	0,587064	0,590954	0,594835	0,598706	0,602568	0,606420	0,610261	0,614092	0,2
0,3	0,617911	0,621719	0,625516	0,629300	0,633072	0,636831	0,640576	0,644309	0,648027	0,651732	0,3
0,4	0,655422	0,659097	0,662757	0,666402	0,670031	0,673645	0,677242	0,680822	0,684386	0,687933	0,4
0,5	0,691462	0,694974	0,698468	0,701944	0,705402	0,708840	0,712260	0,715661	0,719043	0,722405	0,5
0,6	0,725747	0,729069	0,732371	0,735653	0,738914	0,742154	0,745373	0,748571	0,751748	0,754903	0,6
0,7	0,758036	0,761148	0,764238	0,767305	0,770350	0,773373	0,776373	0,779350	0,782305	0,785236	0,7
0,8	0,788145	0,791030	0,793892	0,796731	0,799546	0,802338	0,805106	0,807850	0,810570	0,813267	0,8
0,9	0,815940	0,818589	0,821214	0,823814	0,826391	0,828944	0,831472	0,833977	0,836457	0,838913	0,9
1,0	0,841345	0,843752	0,846136	0,848495	0,850830	0,853141	0,855428	0,857690	0,859929	0,862143	1,0
1,1	0,864334	0,866500	0,868643	0,870762	0,872857	0,874928	0,876976	0,878999	0,881000	0,882977	1,1
1,2	0,884930	0,886860	0,888767	0,890651	0,892512	0,894350	0,896165	0,897958	0,899727	0,901475	1,2
1,3	0,903199	0,904902	0,906582	0,908241	0,909877	0,911492	0,913085	0,914656	0,916207	0,917736	1,3
1,4	0,919243	0,920730	0,922196	0,923641	0,925066	0,926471	0,927855	0,929219	0,930563	0,931888	1,4
1,5	0,933193	0,934478	0,935744	0,936992	0,938220	0,939429	0,940620	0,941792	0,942947	0,944083	1,5
1,6	0,945201	0,946301	0,947384	0,948449	0,949497	0,950529	0,951543	0,952540	0,953521	0,954486	1,6
1,7	0,955435	0,956367	0,957284	0,958185	0,959071	0,959941	0,960796	0,961636	0,962462	0,963273	1,7
1,8	0,964070	0,964852	0,965621	0,966375	0,967116	0,967843	0,968557	0,969258	0,969946	0,970621	1,8
1,9	0,971284	0,971933	0,972571	0,973197	0,973810	0,974412	0,975002	0,975581	0,976148	0,976705	1,9
2,0	0,977250	0,977784	0,978308	0,978822	0,979325	0,979818	0,980301	0,980774	0,981237	0,981691	2,0
2,1	0,982136	0,982571	0,982997	0,983414	0,983823	0,984222	0,984614	0,984997	0,985371	0,985738	2,1
2,2	0,986097	0,986447	0,986791	0,987126	0,987455	0,987776	0,988089	0,988396	0,988696	0,988989	2,2
2,3	0,989276	0,989556	0,989830	0,990097	0,990358	0,990613	0,990863	0,991106	0,991344	0,991576	2,3
2,4	0,991802	0,992024	0,992240	0,992451	0,992656	0,992857	0,993053	0,993244	0,993431	0,993613	2,4
2,5	0,993790	0,993963	0,994132	0,994297	0,994457	0,994614	0,994766	0,994915	0,995060	0,995201	2,5
2,6	0,995339	0,995473	0,995603	0,995731	0,995855	0,995975	0,996093	0,996207	0,996319	0,996427	2,6
2,7	0,996533	0,996636	0,996736	0,996833	0,996928	0,997020	0,997110	0,997197	0,997282	0,997365	2,7
2,8	0,997445	0,997523	0,997599	0,997673	0,997744	0,997814	0,997882	0,997948	0,998012	0,998074	2,8
2,9	0,998134	0,998193	0,998250	0,998305	0,998359	0,998411	0,998462	0,998511	0,998559	0,998605	2,9
3,0	0,998650	0,998694	0,998736	0,998777	0,998817	0,998856	0,998893	0,998930	0,998965	0,998999	3,0

Tabelle: Chi-Quadratverteilung

Quantile (Schwellenwerte) $\chi^2_{1-\alpha;f}$ der χ^2-Verteilung zur statistischen Sicherheit 1-α in Abhängigkeit vom Freiheitsgrad f

Freiheits-	Wahrscheinlichkeit 1- α														Freiheits-
grad	0,001	0,005	0,001	0,025	0,050	0,100	0,300	0,500	0,700	0,900	0,950	0,990	0,995	0,999	grad
1	0,000002	0,000039	0,000002	0,000982	0,003932	0,015791	0,148472	0,454936	1,074195	2,705541	3,841455	6,634891	7,879400	10,827360	1
2	0,002001	0,010025	0,002001	0,050636	0,102586	0,210721	0,713350	1,386294	2,407944	4,605176	5,991476	9,210351	10,596530	13,815004	2
3	0,024298	0,071723	0,024298	0,215795	0,351846	0,584375	1,423652	2,365973	3,664871	6,251394	7,814725	11,344882	12,838073	16,265959	3
4	0,090804	0,206984	0,090804	0,484419	0,710724	1,063624	2,194698	3,356695	4,878432	7,779434	9,487728	13,276699	14,860166	18,466226	4
5	0,210217	0,411751	0,210217	0,831209	1,145477	1,610309	2,999910	4,351459	6,064431	9,236349	11,070483	15,086317	16,749648	20,514651	5
6	0,381038	0,675733	0,381038	1,237342	1,635380	2,204130	3,827551	5,348119	7,231132	10,644637	12,591577	16,811872	18,547513	22,457479	6
7	0,598504	0,989251	0,598504	1,689864	2,167349	2,833105	4,671330	6,345809	8,383429	12,017031	14,067127	18,475324	20,277738	24,321296	7
8	0,857148	1,344403	0,857148	2,179725	2,732633	3,489537	5,527423	7,344120	9,524457	13,361562	15,507312	20,090159	21,954861	26,123931	8
9	1,151914	1,734911	1,151914	2,700389	3,325115	4,168156	6,393304	8,342832	10,656369	14,683663	16,918960	21,666048	23,589275	27,876731	9
10	1,478650	2,155845	1,478650	3,246963	3,940295	4,865178	7,267218	9,341816	11,780720	15,987175	18,307029	23,209287	25,188055	29,587885	10
11	1,833754	2,603202	1,833754	3,815742	4,574809	5,577788	8,147865	10,340996	12,898668	17,275007	19,675153	24,725022	26,756864	31,263507	11
12	2,214131	3,073785	2,214131	4,403778	5,226028	6,303796	9,034278	11,340322	14,011101	18,549340	21,026055	26,216964	28,299660	32,909230	12
13	2,617203	3,565042	2,617203	5,008738	5,891861	7,041500	9,925679	12,339753	15,118718	19,811933	22,362027	27,688184	29,819318	34,527367	13
14	3,040719	4,074659	3,040719	5,628724	6,570632	7,789538	10,821476	13,339272	16,222094	21,064141	23,684782	29,141163	31,319425	36,123867	14
15	3,482511	4,600874	3,482511	6,262123	7,260935	8,546753	11,721168	14,338857	17,321693	22,307121	24,995797	30,577951	32,801491	37,697774	15
16	3,941710	5,142164	3,941710	6,907664	7,961639	9,312235	12,624345	15,338497	18,417891	23,541821	26,296221	31,999861	34,267053	39,251776	16
17	4,416236	5,697274	4,416236	7,564179	8,671754	10,085183	13,530675	16,338179	19,511020	24,769028	27,587100	33,408717	35,718378	40,791109	17
18	4,904800	6,264766	4,904800	8,230737	9,390448	10,864937	14,439861	17,337902	20,601351	25,989418	28,869321	34,805237	37,156386	42,311948	18
19	5,406658	6,843923	5,406658	8,906514	10,117006	11,650912	15,351658	18,337650	21,689128	27,203565	30,143505	36,190775	38,582122	43,819365	19
20	5,921012	7,433811	5,921012	9,590772	10,850799	12,442601	16,265853	19,337430	22,774541	28,411970	31,410420	37,566272	39,996856	45,314218	20
21	6,446688	8,033602	6,446688	10,282907	11,591316	13,239596	17,182269	20,337228	23,857786	29,615086	32,670558	38,932232	41,400943	46,796271	21
22	6,982874	8,642681	6,982874	10,982330	12,338009	14,041490	18,100722	21,337044	24,939013	30,813285	33,924460	40,289448	42,795664	48,267624	22
23	7,529115	9,260383	7,529115	11,688534	13,090505	14,847954	19,021090	22,336880	26,018367	32,006890	35,172460	41,638334	44,181385	49,727643	23
24	8,084664	9,886199	8,084664	12,401146	13,848422	15,658679	19,943227	23,336730	27,095956	33,196235	36,415026	42,979781	45,558363	51,178969	24
25	8,649426	10,519647	8,649426	13,119707	14,611396	16,473405	20,867035	24,336584	28,171914	34,381583	37,652489	44,314014	46,927966	52,618738	25
26	9,222238	11,160218	9,222238	13,843881	15,379163	17,291880	21,792399	25,336458	29,246323	35,563164	38,885130	45,641636	48,289777	54,051136	26
27	9,802882	11,807655	9,802882	14,573373	16,151395	18,113889	22,719233	26,336341	30,319290	36,741228	40,113266	46,962837	49,645035	55,475080	27
28	10,390706	12,461281	10,390706	15,307854	16,927876	18,939235	23,647460	27,336232	31,390874	37,915907	41,337152	48,278166	50,993559	56,891756	28
29	10,986143	13,121067	10,986143	16,047051	17,708381	19,767740	24,576984	28,336130	32,461163	39,087475	42,556948	49,587829	52,335495	58,300642	29
30	11,587628	13,786682	11,587628	16,790756	18,492667	20,599245	25,507764	29,336028	33,530236	40,256017	43,772954	50,892181	53,671868	59,702212	30
40	17,916637	20,706577	17,916637	24,433058	26,509296	29,050516	34,871945	39,335341	44,164868	51,805044	55,758487	63,690771	66,766047	73,402900	40
50	24,673560	27,990825	24,673560	32,357385	34,764236	37,688637	44,313311	49,334941	54,722799	63,167113	67,504805	76,153802	79,489839	86,660312	50
60	31,738120	35,534397	31,738120	40,481707	43,187966	46,458885	53,809121	59,334668	65,226498	74,396999	79,081954	88,379430	91,951806	99,607827	60
70	39,035757	43,275305	39,035757	48,757536	51,739263	55,328945	63,346035	69,334479	75,689283	85,527036	90,531262	100,425051	104,214769	112,316690	70
80	46,519683	51,171933	46,519683	57,153152	60,391459	64,277842	72,915342	79,334325	86,119702	96,578196	101,879472	112,328791	116,320928	124,838899	80
90	54,155907	59,196327	54,155907	65,646592	69,126018	73,291079	82,511093	89,334216	96,523774	107,565010	113,145234	124,116195	128,298676	137,208213	90
100	61,918180	67,327533	61,918180	74,221882	77,929442	82,358127	92,128951	99,334130	106,905755	118,498002	124,342101	135,806891	140,169714	149,448789	100

Tabelle: t-Verteilung

Quantile (Schwellenwerte) $t_{1-\alpha;f}$ der t-Verteilung zur statistischen Sicherheit S = 1-α (bei einseitiger Abgrenzung) in Abhängigkeit vom Freiheitsgrad f; $t_{1-\alpha;f} = -t_{\alpha;f}$

Freiheits-		Statistische Sicherheit S=1- α				
grad f	0,9000	0,9500	0,9750	0,9900	0,9990	0,9995
1	3,077685	6,313749	12,706150	31,820964	318,288803	636,577606
2	1,885619	2,919987	4,302656	6,964547	22,328459	31,599775
3	1,637745	2,353363	3,182449	4,540707	10,214280	12,924429
4	1,533206	2,131846	2,776451	3,746936	7,172930	8,610077
5	1,475885	2,015049	2,570578	3,364930	5,893526	6,868504
6	1,439755	1,943181	2,446914	3,142668	5,207548	5,958718
7	1,414924	1,894578	2,364623	2,997949	4,785252	5,408074
8	1,396816	1,859548	2,306006	2,896468	4,500762	5,041366
9	1,383029	1,833114	2,262159	2,821434	4,296890	4,780886
10	1,372184	1,812462	2,228139	2,763772	4,143658	4,586764
11	1,363430	1,795884	2,200986	2,718079	4,024769	4,436879
12	1,356218	1,782287	2,178813	2,680990	3,929599	4,317844
13	1,350172	1,770932	2,160368	2,650304	3,852037	4,220929
14	1,345031	1,761309	2,144789	2,624492	3,787427	4,140311
15	1,340605	1,753051	2,131451	2,602483	3,732857	4,072790
16	1,336757	1,745884	2,119905	2,583492	3,686146	4,014873
17	1,333379	1,739606	2,109819	2,566940	3,645764	3,965106
18	1,330391	1,734063	2,100924	2,552379	3,610476	3,921741
19	1,327728	1,729131	2,093025	2,539482	3,579335	3,883324
20	1,325341	1,724718	2,085962	2,527977	3,551831	3,849564
21	1,323187	1,720744	2,079614	2,517645	3,527093	3,819296
22	1,321237	1,717144	2,073875	2,508323	3,504974	3,792229
23	1,319461	1,713870	2,068655	2,499874	3,484965	3,767636
24	1,317835	1,710882	2,063898	2,492161	3,466776	3,745372
25	1,316346	1,708140	2,059537	2,485103	3,450186	3,725145
26	1,314972	1,705616	2,055531	2,478628	3,434980	3,706664
27	1,313704	1,703288	2,051829	2,472661	3,421010	3,689493
28	1,312526	1,701130	2,048409	2,467141	3,408204	3,673922
29	1,311435	1,699127	2,045231	2,462020	3,396271	3,659516
30	1,310416	1,697260	2,042270	2,457264	3,385212	3,645982
40	1,303076	1,683852	2,021075	2,423258	3,306923	3,550958
50	1,298713	1,675905	2,008560	2,403267	3,261375	3,495952
60	1,295821	1,670649	2,000297	2,390116	3,231689	3,460154
80	1,292224	1,664125	1,990065	2,373872	3,195237	3,416353
100	1,290075	1,660235	1,983972	2,364213	3,173773	3,390451
200	1,285798	1,652509	1,971894	2,345132	3,131499	3,339810
500	1,283247	1,647907	1,964718	2,333827	3,106616	3,310124

Quantile (Schwellenwerte) $t_{1-\alpha/2;f}$ der *t*-Verteilung zur statistischen Sicherheit S = 1-α (bei zweiseitiger Abgrenzung) in Abhängigkeit vom Freiheitsgrad f; $t_{1-\alpha/2;f} = -t_{\alpha/2;f}$

Freiheits-		Statistische Sicherheit S=1- α						Freiheits-
grad	0,800	0,900	0,950	0,980	0,990	0,998	0,999	grad f
1	3,077685	6,313749	12,706150	31,820964	63,655898	318,288803	636,577606	1
2	1,885619	2,919987	4,302656	6,964547	9,924988	22,328459	31,599775	2
3	1,637745	2,353363	3,182449	4,540707	5,840848	10,214280	12,924429	3
4	1,533206	2,131846	2,776451	3,746936	4,604080	7,172930	8,610077	4
5	1,475885	2,015049	2,570578	3,364930	4,032117	5,893526	6,868504	5
6	1,439755	1,943181	2,446914	3,142668	3,707428	5,207548	5,958718	6
7	1,414924	1,894578	2,364623	2,997949	3,499481	4,785252	5,408074	7
8	1,396816	1,859548	2,306006	2,896468	3,355381	4,500762	5,041366	8
9	1,383029	1,833114	2,262159	2,821434	3,249843	4,296890	4,780886	9
10	1,372184	1,812462	2,228139	2,763772	3,169262	4,143658	4,586764	10
11	1,363430	1,795884	2,200986	2,718079	3,105815	4,024769	4,436879	11
12	1,356218	1,782287	2,178813	2,680990	3,054538	3,929599	4,317844	12
13	1,350172	1,770932	2,160368	2,650304	3,012283	3,852037	4,220929	13
14	1,345031	1,761309	2,144789	2,624492	2,976849	3,787427	4,140311	14
15	1,340605	1,753051	2,131451	2,602483	2,946726	3,732857	4,072790	15
16	1,336757	1,745884	2,119905	2,583492	2,920788	3,686146	4,014873	16
17	1,333379	1,739606	2,109819	2,566940	2,898232	3,645764	3,965106	17
18	1,330391	1,734063	2,100924	2,552379	2,878442	3,610476	3,921741	18
19	1,327728	1,729131	2,093025	2,539482	2,860943	3,579335	3,883324	19
20	1,325341	1,724718	2,085962	2,527977	2,845336	3,551831	3,849564	20
21	1,323187	1,720744	2,079614	2,517645	2,831366	3,527093	3,819296	21
22	1,321237	1,717144	2,073875	2,508323	2,818761	3,504974	3,792229	22
23	1,319461	1,713870	2,068655	2,499874	2,807337	3,484965	3,767636	23
24	1,317835	1,710882	2,063898	2,492161	2,796951	3,466776	3,745372	24
25	1,316346	1,708140	2,059537	2,485103	2,787438	3,450186	3,725145	25
26	1,314972	1,705616	2,055531	2,478628	2,778725	3,434980	3,706664	26
27	1,313704	1,703288	2,051829	2,472661	2,770685	3,421010	3,689493	27
28	1,312526	1,701130	2,048409	2,467141	2,763263	3,408204	3,673922	28
29	1,311435	1,699127	2,045231	2,462020	2,756387	3,396271	3,659516	29
30	1,310416	1,697260	2,042270	2,457264	2,749985	3,385212	3,645982	30
40	1,303076	1,683852	2,021075	2,423258	2,704455	3,306923	3,550958	40
50	1,298713	1,675905	2,008560	2,403267	2,677789	3,261375	3,495952	50
60	1,295821	1,670649	2,000297	2,390116	2,660272	3,231689	3,460154	60
80	1,292224	1,664125	1,990065	2,373872	2,638699	3,195237	3,416353	70
100	1,290075	1,660235	1,983972	2,364213	2,625893	3,173773	3,390451	80
200	1,285798	1,652509	1,971894	2,345132	2,600627	3,131499	3,339810	90
500	1,283247	1,647907	1,964718	2,333827	2,585693	3,106616	3,310124	100