DAA
DEUTSCHE
AKTUAR-AKADEMIE GmbH

Formelsammlung zur LV-Mathematik

I. Kommutationswerte

$$D_x = \ell_x \cdot v^x \qquad (v = \frac{1}{1+i})$$

$$N_x = \sum_{k=0}^{\omega-x} D_{x+k}$$

$$S_x = \sum_{k=0}^{\omega-x} N_{x+k}$$

$$C_x = d_x \cdot v^{x+1}$$

$$M_x = \sum_{k=0}^{\omega-x} C_{x+k}$$

$$R_x = \sum_{k=0}^{\omega-x} M_{x+k}$$

II. Leistungsbarwerte der Lebensversicherung

1. Bezeichnungen

x = Eintrittsalter

n = Versicherungsdauer

i = Rechnungszins

$v = \dfrac{1}{1 + i}$ (Diskontierungsfaktor)

$d = \dfrac{i}{1 + i}$

R_{x+k} = beim Erreichen des Alters x+k gezahlte Verbleibsleistung

T_{x+k} = Todesfalleistung zum Zeitpunkt x+k für eine im Alter x+k-1 gestorbene versicherte Person

2. Barwerte von Verbleibsleistungen

a) Allgemeine Rentenversicherung

$$E(B) = \frac{D_x \cdot R_x + D_{x+1} \cdot R_{x+1} + \ldots + D_\omega \cdot R_\omega}{D_x} \qquad (*)$$

b) Reine Erlebensfallversicherung

$R_{x+n} = 1 \;,\; R_{x+k} = 0 \;,\; 0 \leq k \leq n-1$, dann

$${}_nE_x := v^n \cdot \frac{l_{x+n}}{l_x} = v^n \cdot {}_np_x = \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

Sofern nichts anderes gesagt ist, wird im Folgenden stets von einer jährlichen Rentenzahlung der Höhe 1 ausgegangen.

c) Sofort beginnende vorschüssige Leibrente

- jährliche Rentenzahlweise:

$$\ddot{a}_x = \sum_{\nu=0}^{\omega-x} {}_\nu E_x = \sum_{\nu=0}^{\omega-x} \frac{D_{x+\nu}}{D_x} = \frac{N_x}{D_x}$$

- unterjährliche Rentenzahlweise (m vorschüssige Raten der Höhe $\frac{1}{m}$)

$${}^{(m)}\ddot{a}_x = \ddot{a}_x - k^{(m)}$$

$$= \ddot{a}_x - \left(\frac{m-1}{2 \cdot m} + \frac{m^2-1}{6 \cdot m^2} \cdot i \cdot \left(1 - \frac{i}{2} \right) \right)$$

oder oft einfacher

$${}^{(m)}\ddot{a}_x = \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2 \cdot m} \quad .$$

d) Aufgeschobene Leibrente

Die Aufschubzeit betrage k Jahre. Dann:

$$ {}_{k|}^{(m)}\ddot{a}_x = \frac{D_{x+k}}{D_x} \cdot {}^{(m)}\ddot{a}_{x+k} $$

$$ = \frac{D_{x+k}}{D_x} \cdot (\ddot{a}_{x+k} - k^{(m)}) $$

$$ = \frac{N_{x+k}}{D_x} - k^{(m)} \cdot \frac{D_{x+k}}{D_x} $$

e) Sofort beginnende Leibrente mit garantierter Mindest-laufzeit

Die Garantiezeit betrage g Jahre. Dann:

$$.\,{}^{(m)}\ddot{a}_x^{g} = {}^{(m)}\ddot{a}_{\overline{g}|} + {}_{g|}^{(m)}\ddot{a}_x \quad , $$

wobei $$ {}^{(m)}\ddot{a}_{\overline{g}|} = \ddot{a}_{\overline{g}|} \cdot \left(1 - d \cdot \frac{m-1}{2 \cdot m}\right) $$

$$ = \frac{1 - v^g}{1 - v} \cdot \left(1 - d \cdot \frac{m-1}{2 \cdot m}\right) \quad . $$

f) Abgekürzte sofort beginnende Leibrente

Die Rentenzahlungsdauer betrage n Jahre. Dann:

$$
\begin{aligned}
{}^{(m)}\ddot{a}_{x:\overline{n}|} &= \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - k^{(m)} \cdot \left(1 - \frac{D_{x+n}}{D_x}\right) \\
&= \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} - k^{(m)} \cdot \left(1 - \frac{D_{x+n}}{D_x}\right) \quad .
\end{aligned}
$$

g) Sofort beginnende, arithmetisch steigende Leibrente

$$
R_x = 1 \;,\; R_{x+1} = 2 \;,\; \ldots \;,\; R_\omega = \omega - x + 1 \;,\; m = 1;
$$

$$
(I\,\ddot{a})_x = \frac{S_x}{D_x} = \frac{1}{D_x} \cdot \sum_{\nu=0}^{\omega - x} N_{x+\nu} \quad .
$$

3. Barwerte von Ausscheideleistungen

a) Allgemeine Todesfallversicherung

$$
E(B) = \sum_{k=0}^{\infty} T_{x+k+1} \cdot \frac{C_{x+k}}{D_x}
$$

Sofern nichts anderes vorausgesetzt ist, wird im Folgenden stets eine Ausscheideleistung der Höhe 1 zugrunde gelegt.

b) Lebenslängliche Todesfallversicherung

$$
\begin{aligned}
A_x &= \frac{1}{D_x} \cdot \sum_{\nu=0}^{\omega - x} C_{x+\nu} = \frac{M_x}{D_x} \\
&= 1 - d \cdot \ddot{a}_x \quad .
\end{aligned}
$$

c) n-jährige Risikoversicherung

$$_{|n}A_x = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$$

d) Gemischte Versicherung auf den Todes- und Erlebensfall

$$A_{x:\overline{n|}} = {}_{|n}A_x + {}_nE_x$$

$$= \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}$$

bzw.

$$A_{x:\overline{n|}} = 1 - d \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n|}} \quad .$$

e) Arithmetisch steigende lebenslängliche Todesfallversicherung

$$T_{x+1} = 1 \;,\; T_{x+2} = 2 \;,\; \dots \;,\; T_\omega = \omega - x \;.$$

$$(I\,A)_x = \frac{1}{D_x} \cdot \sum_{\nu=0}^{\omega-x} M_{x+\nu} = \frac{R_x}{D_x}$$

e) Arithmetisch steigende temporäre Todesfallversicherung

$$T_{x+1} = 1 \,,\, T_{x+2} = 2 \,,\, \dots \,,\, T_{x+n} = n \;,\; T_{x+\nu} = 0 \text{ für } \nu > n$$

$$_{|n}(I\,A)_x = \frac{1}{D_x} \cdot \left(R_x - R_{x+n} - n \cdot M_{x+n}\right)$$